Équation de Bessel

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *La fonction* $J_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!^2} x^{2n}$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}$ *et est l'unique solution de l'équation différentielle*

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0$$

développable en série entière vérifiant $J_0(0) = 1$

Preuve : Procédons par analyse-synthèse :

Analyse :

Soit f une solution développable en série entière au voisinage de 0, Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a

$$\begin{cases} xf(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ xf''(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \end{cases}$$

D'où $(E) \iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$.
Par unicité du développement en série entière, on a

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1} \end{cases}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)^2(2n-2)^2 \dots 2^2} = \dfrac{(-1)^n}{4^n n!^2} a_0$. Donc

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!^2} x^{2n}$$

Synthèse :

La série ainsi obtenue a un rayon de convergence infini . En effet, d'après le critère de d'Alembert,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^n n!^2}{(-1)^n 4^{n+1} (n+1)!^2} x^2 \right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc f définit une fonction développable en série entière dont les coefficients vérifient la récurrence Íétablie : f est donc solution de l'équation différentielle.
Comme $f(0) = a_0$, il existe une unique solution développable en série entière et vérifiant $f(0) = 1$ définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n n!^2} x^{2n}$ □

Lemme 1. *Soit J_0 la solution développable en série entière tel que $J_0(0) = 1$ et f une solution de l'équation sur un intervalle $]0, a[$, (f, J_0) est libre si et seulement si f n'est pas borné au voisinage de* 0.

Preuve du lemme : Si (f, J_0) est liée, comme J_0 est bornée au voisinage de 0, f est bornée au voisinage de 0.

Supposons (f, J_0) libre, sur $]0, a[$, l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2 dont (f, J_0) est une base. Considérons le Wronskien $W = f J_0' - J_0 f'$ de la famille (f, J_0). On a $\forall x \in]0, a[, W'(x) = -\frac{1}{x} W(x)$ donc

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, a[, W(x) = C e^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$$

Comme (f, J_0) est libre, on a $C \neq 0$, donc $\forall x \in]0, a[, f(x) J_0'(x) - J_0(x) f'(x) = \frac{C}{x}$.
Si f est borné au voisinage de 0, comme $\begin{cases} J_0(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \\ J_0'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$. On a $f'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{C}{x}$ donc pour $b \in]0, a[$, comme $x \mapsto -\frac{C}{x}$ garde un signe constant sur $]0, b[$ et n'est pas intégrable sur $]0, b[$, par intégration des relations de comparaison

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)\,\mathrm{d}t \sim -C \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -C(\ln(x) - \ln(b))$$

d'où $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C \ln(x)$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ce qui contredit l'hypothèse f borné. D'où l'équivalence, □

Application.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} x^{2n}$$

Preuve : La fonction $(x,\theta) \mapsto \frac{1}{\pi}\cos(x\sin(\theta))$ est de classe C^∞ donc en posant $g : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, par dérivation sous le signe somme :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ g''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [(x\cos(x\sin\theta)\cos^2\theta) - \sin(x\sin\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\sin(x\sin\theta)\cos\theta\right]_0^\pi\end{aligned}$$

Donc g est solution de (E) et est bornée sur $\mathbb{R}$ donc (J_0, g) est liée sur $]0,+\infty[$, comme $J_0(0) = g(0)$, il y a égalité sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}$ par parité. $\square$

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 4*. Cassini, 2016.